Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Champs de vecteurs de ℝ²

Définition :

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On appelle champ de vecteurs défini sur U une applicaton qui, à tout point de U, fait correspondre un vecteur de $\mathbb{R}^2$. $\forall (x,y)\in U,\ \vec{V}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$.
Si cette apllication est de classe $\mathscr{C}^1$, elle possède en tout point des dérivées partielles. On peut écrire sa matrice jacobienne : $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$.

1. Champ de gradient

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$, son gradient $\overrightarrow{\text{grad}}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ est un champ de vecteurs de matrice jacobienne : $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

On voit que d'après le théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique.
Réciproquement, tout champ de vecteurs dont la matrice jacobienne est symétrique est-il un champ de gradient ?

- Oui, localement, c'est-à-dire que chaque point de U possède un voisinage sur lequel il existe une fonction f dont le champ de vecteur soit le gradient.
- Non, en général, sur U tout entier. La possibilité de « recoller » les solutions locales dépend étroitement des propriétés topologiques de U. C'est possible si par exemple U est étoilé, c'est-à-dire s'il existe $A\in U$ tel que pour tout point M de U, le segment $[AM]$ est inclus dans U.

Théorème de Poincaré :

Tout champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$: $\vec{V}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ dont la matrice jacobienne est symétrique (c'est-à-dire $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$) sur un domaine U étoilé par rapport à un de ses points est un champ de gradient, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y)\in U,\ P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$.

Définition :

On dit alors que f est un potentiel scalaire du champ $\vec{V}$ et que ce champ dérive d'un potentiel scalaire.

Exemple :

Soit $f\ :\ (x,y)\mapsto\left(\frac{y}{(x+y)^2},\frac{\lambda x}{(x+y)^2}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,-x)\}$ (deux demi-plan étoilés notés P_1 et P_2)

Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ pour que f dérive d'un potentiel, que l'on déterminera.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x+y)^2-2y(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{x-y}{(x+y)^3}\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\lambda(x+y)^2-2\lambda x(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{\lambda(y-x)}{(x+y)^3}\quad\Rightarrow\ \lambda=-1.$$

D'après le théorème de Poincaré, il existe f de classe $\mathscr{C}^2$ sur P_1 tel que $P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{(x+y)^2}\ \Rightarrow\ f=\frac{-y}{x+y}+c(y),\ \text{ donc }\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-(x+y)+y}{(x+y)^2}+c'(y)=\frac{-x}{(x+y)^2}+c'(y).$$

Or, $\frac{\partial f}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{-x}{(x+y)^2}$, donc $c'(y)=0$, donc $c(y)=k_1\in\mathbb{R}$

De même sur P_2, et alors $f(x,y)=\frac{-y}{x+y}+k_i$.

2. Intégrale curviligne

Définition :

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, et $\vec{\gamma}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[t_0, t_1]$, avec $t_0 < t_1$. On appelle circulation du champ $\vec{V}$ sur γ l'intégrale $I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{V}(\vec{\gamma}(t)) \mid \vec{\gamma}'(t) \right) dt$.
Si $\vec{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ et $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, cette intégrale s'écrit
$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[P\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] dt$.

Un changement de paramètre de classe $\mathscr{C}^1$ correspond à un changement de variable dans cette intégrale : la circulation du champ $\vec{V}$ sur $\vec{\gamma}$ ne dépend donc pas du paramétrage, mais seulement du support de $\vec{\gamma}$ et des points de départ et d'arrivée.
En remarquant que $x'(t)dt = dx$ et $y'(t)dt = dy$, on peut écrire $I = \int_{\vec{\gamma}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.
Cete notation est notée intégrale curviligne. L'indice $\vec{\gamma}$ rappelle la courbe paramétrée sur laquelle on intègre, puisque plus rien dans l'intégrale n'y fait référence.

3. Circulation d'un champ de gradient

Théorème :

La circulation du champ de gradient d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur une courbe paramétrée ne dépend que des valeurs de f aux extrémités de cette courbe et non du chemin utilisé pour relier ces points. En particulier, la circulation d'un champ de gradient sur une courbe fermée est nulle.

Preuve :

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur une partie U, $\vec{\gamma}$ une courbe paramétrée de U de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, la circulation du gradient de f sur $\vec{\gamma}$ est :
$$I = \frac{\int_{\vec{\gamma}} \partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right) dt$$
On reconnaît la dérivée de la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ donc $I = f(x(t_1), y(t_1)) - f(x(t_0), y(t_0))$.

Remarque :

Dans la pratique, on utilise le théorème de Poincaré pour reconnaître si un champ de vecteurs est un champ de gradient.

Corollaire :

Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine U étoilé, dont la matrice jacobienne est symétrique, la circulation de $\vec{V}$ entre deux points ne dépend pas du chemin utilisé pour relier ces points en restant dans U.
En particulier, la circulation de $\vec{V}$ est nulle sur toute courbe fermée incluse dans U.

4. Formule de Green-Riemann

4.1. Formule

Théorème :

Soit U un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est une courbe simple fermée $\vec{\gamma}$ de classe $\mathscr{C}^1$, parcourue dans le sens direct. Soit $\vec{V}=(P,Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Alors $\int_{\vec{\gamma}} P\,dx+Q\,dy=\iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$.

Remarques :

− On retrouve le résultat du corollaire : $\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \int_{\vec{\gamma}} P\,dx+Q\,dy=0$.

− Il faut bien faire attention pour appliquer ce théorème à ce que $\vec{V}$ soit bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur U tout entier, et pas seulement sur $\vec{\gamma}$.

4.2. Applications aux calculs d'aires

Considérons le champ de vecteurs $\vec{V}=(-y,0)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit U un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est une courbe simple fermée $\vec{\gamma}$ de classe $\mathscr{C}^1$, parcourue dans le sens direct.
La formule de Green-Riemann nous donne $\int_{\vec{\gamma}} -y\,dx=\iint_U dx\,dy$.
On reconnaît l'aire A du domaine U. On peut faire de même avec le champ $\vec{V}=(0,x)$.
On a alors $A=\int_{\vec{\gamma}} -y\,dx=\int_{\vec{\gamma}} x\,dy=\frac{1}{2}\int_{\vec{\gamma}} -y\,dx+x\,dy$.
En coordonnées polaires, on a :
$-y\,dx+x\,dy=-\rho\sin(\theta)(\cos(\theta)d\rho-\rho\sin(\theta)d\theta)+\rho\cos(\theta)(\sin(\theta)d\rho+\rho\cos(\theta)d\theta)=\rho^2 d\theta$.
D'où $A=\frac{1}{2}\int_{\vec{\gamma}} \rho^2 d\theta$.

* * * * *